OLASILIK VE İSTATİSTİK

Olasılık, bir olaya hangi sıklıkla rastlanabileceğinin ya da bir olayın olabilirlik derecesinin ölçüsüdür. Örneğin, madeni bir para havaya atıldığında yazı yada tura gelebilir. Burada her ikisinin gelme olasılığı eşit ve bu olasılık ½ dir.

Temel Kavramlar:

Olay: Olasılık teorisinin temel kavramlarından birisi olay kavramıdır. Olay bir deneyin sonucu anlamındadır. Kesin olay ve rastgele olay olmak üzere iki çeşit olaydan söz edilebilir.

Kesin Olay: Deney tekrarlandığında sonucu kesin olan olaydır.

Rastgele Olay: Deney tekrarlandığında sonucun her seferinde değişebildiği olaylara denir. Olasılık teorisi rastgele olaylarla ilgilenir.

Örnek Uzay: Bir deneyin tüm mümkün sonuçlarının oluşturduğu kümeye örnek uzay denir ve Ω ile gösterilir. Denemeler sonucunda tanımlanan her bir olay örnek uzayın bir alt kümesidir. Bu sebeple Ω nın kendisi ve boş küme de birer olaydır. Ω ya kesin olay, boş kümeye (∅) ise imkansız olay denir.
Örneğin, bir zar atma deneyi için örnek uzay

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

şeklindedir. Zarın çift sayı gelmesi olayı $A=\{2,4,6\}$; zarın 7 gelmesi olayı $B=\emptyset$ dir.

Sınıf: Örnek uzayın alt kümelerinden oluşan kümeye sınıf denir. Elemanları küme olan küme olarak da tanımlanabilir. Örneğin, $\Omega=\{1,2,3,4\}$ olarak verilsin. Buna göre;

$U_1=\big\{\{1\},\{3\}\big\}$ U_1 sınıfı Ω üzerinde bir sınıftır.

$U_2=\{\Omega,\emptyset\}$ U_2 sınıfı Ω üzerinde bir sınıftır.

$U_3=\big\{\{1,2\},\{3,4\}\big\}$ U_3 sınıfı Ω üzerinde bir sınıftır.

$U_4=\{1,3\}$ U_4 sınıfı Ω üzerinde bir sınıf değildir.

- Bir olayın kendisinin, tümleyeninin, başka olaylarla birleşiminin, kesişiminin olasılığı bulabilmek için bu olayların bir seti gerekir. Bu set σ-cebir ile tanımlanır.

TANIM: Ω boş olmayan bir küme U da Ω üzerinde tanımlı bir sınıf olsun.

i. $\Omega \in U$ olmalı

ii. $\forall\, A \in U$ iken $A^c \in U$ (A^c : A kümesinin tümleyeni anlamına gelir)

iii. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in U$ iken $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

özelliklerini sağlayan U sınıfına σ-cebir denir. (Ω,U) ikilisine ise ölçülebilir uzay denir.

Örnek: Ω={1,2,3,4} olsun.

a) $U_1=\{\emptyset, \{1\}\}$ sınıfı σ-cebir midir?

Çözüm a: $\Omega \notin U_1$ olduğundan U_1 sınıfı Ω üzerinde σ-cebir değildir.

b) $U_2=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \Omega\}$ sınıfı σ-cebir midir?

Çözüm b:

i. $\Omega \in U_2$ koşulu sağlandı

ii. $\emptyset \in U_2 \rightarrow \emptyset^c=\Omega \in U_2$ koşulu sağlandı

$\{1\} \in U_2 \rightarrow \{1\}^c=\{2,3,4\} \in U_2$ koşulu sağlandı

$\{2\} \in U_2 \rightarrow \{2\}^c=\{1,3,4\} \in U_2$ koşulu sağlandı

iii. $A_1=\{1\}$

$A_2=\{2\}$

$A_3=\emptyset$

$A_4=\emptyset$

$\vdots$

$A_n=\emptyset$

ise

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{1\} \cup \{2\}=\{1,2\} \notin U_2$ olduğundan U_2 sınıfı Ω üzerinde σ-cebir değildir.

Örnek: Ω={1,2,3} olsun.

$U_1=\{\{1\}, \{2,3\}, \emptyset, \{1,2,3\}\}$ sınıfı σ-cebir midir?

Çözüm:

i. $\Omega \in U_1$ koşulu sağlandı

ii. $\{1\} \in U_1 \rightarrow \{1\}^c=\{1,2,3\} \in U_1$ koşulu sağlandı

$\emptyset \in U_1 \rightarrow \emptyset^c=\{1,2,3\} \in U_1$ koşulu sağlandı

iii. $A_1=\{1\}$

$A_2=\{2,3\}$

$A_3=\emptyset$

$A_4=\emptyset$

$\vdots$

$A_n=\emptyset$

ise

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{1\} \cup \{2,3\}=\{1,2,3\} \in U_1$ olduğundan U_1 sınıfı Ω üzerinde bir σ-cebirdir.

Kaynaklar

1. Akdi, Y. (2010). Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.
2. Sağlam, V., Sağır, M. ve Yücesoy, E. (2018). Olasılığa Giriş, Güncellenmiş 3. Baskı, Seçkin Yayınevi.
3. Akdeniz, F. (2007). Olasılık ve İstatistik, Nobel Kitabevi.
4. Hogg, R. V. and Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.
5. Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.
6. Ross, M,R. (2012) Olasılık ve İstatistiğe Giriş-Mühendisler ve Fenciler için, 4. Basımdan Çeviri, Nobel Kitabevi.
7. Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.
8. Erbaş, S.O. (2007). Olasılık ve İstatistik, İkinci Baskı, Gazi Kitabevi.